

基于费马点的网络连通性修复策略

周赵斌^{1,2}, 章红艳³, 汪晓丁^{1,2}

(1. 福建师范大学数学与信息学院, 福建 福州 350117;
2. 福建省网络安全与密码技术重点实验室, 福建 福州 350117;
3. 福建师范大学协和学院, 福建 福州 350117)

摘要: 连通性修复是保证网络有效性、可靠性的重要手段, 而目前关于 1-连通性修复的策略没有将图形的几何性质与网络的拓扑结构很好地结合, 因此难以用最少的中继节点完成修复。将费马点、三角剖分与最小生成树有效结合, 设计了一种基于费马点的网络连通性修复策略, 并且从理论上证明了该策略的近似比和复杂度分别为 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 与 $O(n \log n)$, 而仿真实验表明该策略在中继节点消耗上明显少于其他同类型策略。

关键词: 网络有效性; 连通性修复; 三角剖分; 费马点

中图分类号: TP393

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.2096-109x.2019048

Fermat point based connectivity restoration strategy in networks

ZHOU Zhaobin^{1,2}, ZHANG Hongyan³, WANG Xiaoding^{1,2}

1. College of Mathematics and Informatics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China
2. Fujian Provincial Key Lab of Network Security & Cryptology, Fuzhou 350117, China
3. Concord University College, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China

Abstract: The connectivity restoration ensures the availability and reliability of a network. Both of geometrical features and topological structures should be taken into consideration at the same time, without which previous works can hardly restore the connectivity with the least number of relay nodes. The Fermat point, the triangulation and the minimum spanning tree are integrated with the design of an efficient restoration strategy. The theoretical analysis indicate that the approximation ratio of the proposed strategy is $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ and the complexity of which is $O(n \log n)$. Simulation results show that the proposed strategy outperforms other strategies in the number of relay nodes required.

Key words: network availability, connectivity restoration, triangulation, fermat point

收稿日期: 2019-01-09; 修回日期: 2019-06-06

通信作者: 汪晓丁, wangdin1982@fjnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61702103); 福建省自然科学基金资助项目 (No.2016J01289); 福建省教育厅基金资助项目 (No.JAT160123)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61702103), The Natural Science Foundation of Fujian Province (No.2016J01289), Fujian Provincial Education Department Project (No.JAT160123)

论文引用格式: 周赵斌, 章红艳, 汪晓丁. 基于费马点的网络连通性修复策略[J]. 网络与信息安全学报, 2019, 5(5): 32-38.
ZHOU Z B, ZHANG H Y, WANG X D. Fermat point based connectivity restoration strategy in networks[J]. Chinese Journal of Network and Information Security, 2019, 5(5): 32-38.

1 引言

网络连通性的修复往往是利用较少的资源(如中继节点等)在各连通分支之间构造一棵最短内接树,即修复网络的1-连通性。由于中继节点是长度为 R 、间隔地部署在内接树上,故所需的数量约为 $\frac{L}{R}$,其中 L 为内接树长度。因此连通性修复问题就被模型化成构造一棵1-连通的具有最少斯坦纳点(中继节点)且边长为定值(R)的斯坦纳最小树(SMT-MSP),这意味着内接树越短所需的资源也越少,即越接近最优的SMT-MSP。目前关于网络1-连通性修复的策略并没有将图形的几何性质与网络的拓扑结构很好地结合,因此难以用最少的中继节点完成1-连通性的修复。

本文将具有较好图形几何性质的费马点、网络拓扑结构中的三角剖分与最小生成树有效结合,设计了一种高效的网络连通性修复策略(RSFP, restoration strategy based on fermat point)。RSFP通过反复构造基于费马点的最短三角形内接树从而减少了连通性修复所需的中继节点数,并且从理论上证明策略RSFP的近似比和复杂度分别为 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 与 $O(n \log \log n)$,而仿真实验表明该策略在中继节点消耗上明显少于其他同类型策略。

2 国内外研究现状

现有的1-连通性修复策略主要可分为两类。其中,一部分策略^[1-11]利用构造SMT-MSP所消耗的资源(中继节点)与理论上最优SMT-MSP所需资源(中继节点)的比(即近似比)作为衡量标准,近似比越小算法的性能越好,而另一部分策略^[12-14]则采用仿真实验来验证算法性能。

Chen等^[11]提出基于四边形构造的近似算法,不仅证明此算法近似比为3,并且证明了单纯采

用斯坦纳化最小生成树(MST)的方法来修复连通性的近似比也为3。在此基础上,Cheng等^[8]提出基于三角形构造结合斯坦纳化MST的近似算法,以及基于3-超图最小生成树的随机近似算法,并证明这两者的近似比分别为3和2.5。尽管后者近似比较低,但其算法复杂度偏高。Lloyd等^[9]提出一种改进的斯坦纳化MST法,近似比在6~7之间。Tang等^[10]将部署区域划分成网络并对网络分簇,对于每个网格部署一个节点作为簇头负责簇内与簇间通信,从而恢复网络的1-连通性,此算法的近似比为4.5。Efrat等^[3]、Yang等^[6]、Misra等^[5,7]对于节点与节点、节点与中继、中继与中继这3种不同连接方式给予相应的权值并以此构造赋权完全图,然后根据网络不同的应用场景,结合目前最优的最小权斯坦纳树构造算法^[15],提出近似比分别为3.11、6.43、6.2和12.4的修复算法。在文献[4]中,Wang等提出了一种结合Voronoi图和重心的算法。近期,Wang等^[1]、Lalouani等^[2]先后提出在网络中存在障碍物情况下基于直骨架的修复算法。

文献[12-14]通过仿真实验验证算法性能。Ranga等^[13]提出一个基于0梯度点的修复算法。此算法首先利用连通分支构造一个凸壳,然后构造凸壳内各点与连通分支之间的距离函数并计算出能够使该函数梯度为0的点,最后以这个点为中心部署中继节点来连接各个分支。Joshi等^[12]利用网络的直骨架并结合节点的传输半径,规划出一条最优的中继节点部署路线。陈洪生等^[14]给出了一个基于四边形的连通度修复算法并证明了其时间和信息复杂度。

相比上述策略,本文所提出的策略RSFP不仅近似比 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 是最优的,而且复杂度也仅为 $O(n \log \log n)$ 。表1给出了RSFP与目前已知算法在近似比和复杂度方面的对比。

表 1 各算法在近似比和复杂度方面的对比

算法	近似比	复杂度
Misra 等 ^[5]	12.4	$O(n^{2k-2} + n^{2k+1} \log n)$
Lloyd 等 ^[9]	7	$O(n \log n)$
Yang 等 ^[6]	6.43	$O(n^{2k-2} + n^{2k+1} \log n)$
Misra 等 ^[7]	6.2	$O(n^{2k-2} + n^{2k+1} \log n)$
Tang 等 ^[10]	4.5	无
Efrat 等 ^[3]	3.11	$O(n^{2k-2} + n^{2k+1} \log n)$
Cheng 等 ^[8]	3	$O(n^4)$
Chen 等 ^[11]	3	$O(n^3)$
Wang 等 ^[4]	3	$O(n^3)$
Wang 等 ^[1]	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$O(n^3)$
Lalouani 等 ^[2]	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$O(n^4)$
Cheng 等 ^[8]	2.5	$O(n^3)$
RSFP (本文)	$\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$	$O(n \log n)$

3 预备知识

定义 1^[16] 点集 V 的一个三角剖分 $T = \{V, E\}$ 是一个平面图 G ，该平面图满足以下条件：1) 除了端点，平面图中的边不包含点集中的任何点；2) 没有相交边；3) 平面图中所有的面都是三角形。

定义 2^[15] 费马点 f 是一个位于三角形 $\Delta p_i p_j p_k$ 内且到三角形三个顶点 p_i 、 p_j 和 p_k 距离之和最短的点，即三角形的最短内接树 $SMT = fp_i \cup fp_j \cup fp_k$ ，并且有 $\angle p_i fp_k = \angle p_i fp_j = \angle p_j fp_k = 120^\circ$ 。

4 系统模型

一个不连通的网络将被映射成图 $G = \{V, E\}$ ，其中， V 为点的集合而 E 为边的集合。具体来说，每一个图 G 中的点 $v \in V$ 代表网络中的一个节点，

而每一条边 $v_i v_j \in E$ 代表网络中任意一对距离小于 R 的节点之间的链路。为了修复网络的连通性，通过以间隔 R 部署中继节点的方式进行连接。本文所解决的问题其形式化描述如下。

给定一个具有 $|V| = n$ 个节点的图 G ，需要设计一种将 n 个节点连接起来的方式，使所需中继节点个数最少并且任意两个中继节点之间距离不超过 R 。

针对此问题，本文提出了一种高效的连通性修复策略（RSFP，restoration strategy based on fermat point）。

5 RSFP 策略

该策略通过 7 个步骤来实现网络 1-连通性的修复，具体执行步骤如下。

步骤 1 对于图 G 进行 Delaunay 三角剖分，定义其导出子图 Tr_G ，则有 $Tr_G = \cup t_j$ ，其中， t_j 为点 p_i 、 p_j 和 p_k 组成的三角形 $\Delta p_i p_j p_k$ 。

步骤 2 对于任意一个三角形 $t_j \in Tr_G$ ，计算其因子 $c_j = \frac{MST_{t_j}}{Fer_{t_j}}$ ，然后根据因子大小对所有三角形进行降序排列。

步骤 3 依照步骤 2 中的次序将三角形加入集合 T ，如果存在某个三角形 t_j 与任意 T 中三角形 t_j 有相同边，即 $t_j \cap t_i \neq \emptyset$ ，那么将 t_j 删除，即 $T = T \setminus \{t_j\}$ 。

步骤 4 对于 T 中任意一个三角形 t_j ，至少重复执行以下步骤 $k = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}(n_i - 1) - 2$ 次来构造最短内接树，其中， n_i 表示 t_i 中节点个数而 t_i^k ， $f_{t_i}^k$ 和 $SMT_{t_i}^k$ 分别指 t_i 在第 k 次迭代生成的三角形、费马点与最短内接树。

① 设边 e_i 和 e_j 为 $SMT_{t_i^{k-1}}$ 中最长的两条边，将 e_i 、 e_j 与其相关联的费马点 $f_{t_i}^{k-1}$ 组成三角形 t_i^{k-1} ，并在此三角形上构造第 k 轮的最短内接树 $SMT_{t_i}^k$ 。

② 将边 e_i 和 e_j 从 $SMT_{t_i}^{k-1}$ 中删除，即 $SMT_{t_i}^{k-1} = SMT_{t_i}^{k-1} \setminus \{e_i, e_j\}$ ，并记 $k = k + 1$ ，然后返回步骤4中①。

步骤5 对于每个三角形 t_i ，将 k 次迭代中每次生成的最短内接树连接成关于 t_i 的最短内接树，即 $SMT_{t_i} = \cup SMT_{t_i}^k$ 。

步骤6 通过 G 的最小生成树 MST_G 构造图 SMT_G ，使 $SMT_G = MST_G \cup SMT_{t_1} \cup SMT_{t_2} \cup \dots \cup SMT_{t_n}$ ，对于任何一个圈 $C_i \in SMT_G$ ，如果存在边 $e_i \in C_i$ 使对于所有的 j ， $1 \leq j \leq |T|$ ，都有 $e_i \in SMT_{t_j}$ ，则删除边 e_i 。即 $SMT_G = SMT_G \setminus \{e_i\}$ ，那么 SMT_G 为所求最短内接树。

步骤7 在 SMT_G 上以 R 为间隔部署中继节点。

以下将给出一个 RSFP 修复网络连通性的例子。

图1(a)给出了一个由5个节点 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 组成的网络 G 。首先对 G 进行 Delaunay 三角剖分，得到3个三角形 $\Delta s_1 s_2 s_3$ 、 $\Delta s_1 s_3 s_5$ 和 $\Delta s_3 s_4 s_5$ 并分别对每个构造基于费马点的最短内接树，其中黑点代表费马点。通过各自的因子选出边不相交的三角形 $\Delta s_1 s_2 s_3$ 和 $\Delta s_3 s_4 s_5$ ，然后分别对这两个三角形反复进行基于费马点的最短内接树构造。如图1(b)所示， $\Delta s_1 s_2 s_3$ 进行了3轮构造，而 $\Delta s_3 s_4 s_5$ 只进行2轮构造，其中虚线表示每轮构造中需要删掉的最长边。如图1(c)所示，在 $\Delta s_1 s_2 s_3$ 和 $\Delta s_3 s_4 s_5$ 最短

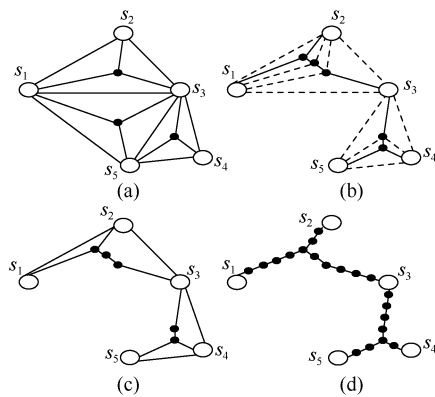


图1 一个 RSFP 示例

内接树构造好后，将 G 的最小生成树用于这两个最短内接树的连接，并在此过程中删去形成圈的边 $s_1 s_2, s_2 s_3, s_3 s_4, s_4 s_5$ 从而生成图 G 的最短内接树。在图1(d)中，每个节点以半径 R 为间隔排列在最短内接树上。

6 理论分析

本节对策略 RSFP 在近似比与复杂度方面进行分析。

定理1 设 $SMT_{t_i}^k$ 的三条边 e_i 、 e_j 与 e_k 中最长两条边为 e_i 与 e_j ，当 $x = y = \frac{1}{2} L(SMT_{t_i}^{k-1})$ 时，距离函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} x + y$ 最大，其中 $x = L(e_i) + L(e_j)$ ， $y = L(e_k)$ 。

证明

根据题设，要使 $f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} x + y$ 最大，需满足以下最优化公式，即

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= \frac{\sqrt{3}}{2} x + y \\ \text{s.t. } x + y &= L(SMT_{t_i}^{k-1}) \\ y - x &\leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

此约束优化问题可采用拉格朗日乘子法求解，首先构造拉格朗日函数，其中， λ_1 、 λ_2 为拉格朗日乘子，引入的新的 η 是一个松弛变量，即

$$g(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \eta^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} x + y + \lambda_1 (x + y - L(SMT_{t_i}^{k-1})) + \lambda_2 (y - x + \eta^2)。$$

$$\text{使 } \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = 0, \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x + y - L(SMT_{t_i}^{k-1}) = 0 \\ y - x + \eta^2 = 0 \\ 2\eta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这意味着当 $x = y = \frac{1}{2}L(\text{SMT}_{t_i}^{k-1})$ 时, $f(x, y)$ 最大, 即 $f(x, y) \leq L(\text{SMT}_{t_i}^{k-1})(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ 。证毕。

对于任意一个三角形 t_i 的第 k 轮迭代中, 上一轮基于费马点的最短内接树 $\text{SMT}_{t_i}^{k-1}$ 的最长两条边 e_i 与 e_j 和它们相关联的费马点 f_i^{k-1} 所组成的三角形 t_i^{k-1} 将用于本轮最短内接树 $\text{SMT}_{t_i}^k$ 的生成。

根据费马点的定义可得, 该三角形的最小生成树 $\text{MST}_{t_i}^{k-1}$ 是由 e_i 与 e_j 组成的。此外, 根据文献[1]易知, t_i^{k-1} 的最短内接树的长度约为 $\text{MST}_{t_i}^{k-1}$ 长度的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。为了方便证明, 用 $L(t_i^k)$ 表示在第 k 轮迭代后 t_i 的最短内接树长度, 那么有 $L(t_i^k) = L(t_i^{k-1} \setminus \{e_i, e_j\}) + L(\text{SMT}_{t_i}^k)$ 。对于一个图 G , 有以下定理成立。

定理 2 设 $a = \frac{L(\text{SMT}_{t_i}^k)}{L(\text{MST}_{t_i}^k)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{L(e_i) + L(e_j)}{L(\text{SMT}_{t_i}^{k-1})} = \frac{1}{2}$, 则

$$L(t_i^n) = a\beta(1 + a\beta + a^2\beta^2 + \dots + a^{n-1}\beta^{n-1} + a^n\beta^{n-1}) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$$

其中, 边 e_i 与 e_j 为 $\text{SMT}_{t_i}^{k-1}$ 的两条最长边。

证明

通过归纳假设法来构造 t_i 最短内接树的长度函数 $L(t_i^k)$, 其中, $L(t_i^0) = a(\beta + \beta) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$ 。

当 $k=1$ 时, $L(t_i^1) = a(\beta + a\beta) \cdot L(\text{MST}_{t_i}) = a\beta(1 + a\beta^0) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$ 。

当 $k=2$ 时, $L(t_i^2) = a(\beta + a\beta(\beta + a\beta)) \cdot L(\text{MST}_{t_i}) = a\beta(1 + a\beta + a^2\beta^1) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$ 。

当 $k=n-1$ 时, $L(t_i^{n-1}) = a\beta(1 + a\beta + a^2\beta^2 + \dots + a^{n-1}\beta^{n-2}) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$ 成立。

容易验证当 $k=n$ 时, $L(t_i^n) = a\beta(1 + a\beta + a^2\beta^2 + \dots + a^{n-1}\beta^{n-1} + a^n\beta^{n-1}) \cdot L(\text{MST}_{t_i})$ 此外, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} a\beta(1 + a\beta + a^2\beta^2 + \dots + a^{n-1}\beta^{n-1} + a^n\beta^n) =$

$\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$ 且 $\alpha < 1, \beta < 1$, 可得 $L(t_i^n) < \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} L(\text{MST}_{t_i})$ 。证毕。

定理 3 策略 RSFP 的近似比为 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 。

证明

首先, Cheng 等在文献[30]中证明了基于三角形构造结合斯坦纳化最小生成树 MST 的算法, 其近似比为 3; 其次, 图 G 的最短内接树 $\text{SMT}_G = \bigcup_i \text{SMT}_{t_i} \cup \text{MST}_G \setminus C$, 其中 C 代表策略

RSFP 步骤 6 中所需要删除边的集合; 再次, 策略 RSFP 所需要的节点个数约为 $\frac{\text{SMT}_G}{R}$; 此外根

据定理 1、定理 2 和定理 3, 易知策略 RSFP 的近似比为 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 。

证毕。

定理 4 策略 RSFP 的复杂度为 $O(n \log n)$ 。

证明

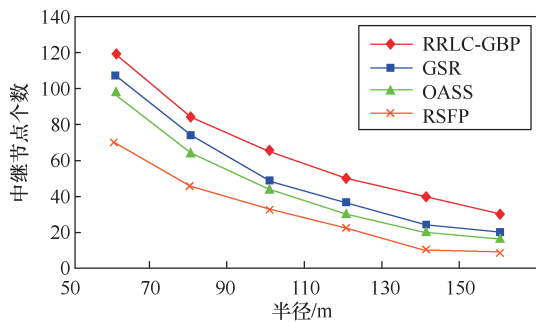
策略 RSFP 通过 7 个步骤完成对图 G 的连通性修复, 接下来依次分析每个步骤的复杂度从而得到其总体的复杂度。第 1 步, 图 G 的 Delaunay 三角剖分, 其复杂度为 $O(n \log n)$, 其中, n 代表图 G 的节点个数。第 2 步, 因子计算和排序可在多项式时间 $O(n \log n)$ 内完成。第 3 步, 选择需要构造基于费马点内接树的三角形可在常数时间内完成。第 4 步, 通过 $k = \frac{2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}(n_i - 1) - 4$ 次迭代构造三角形 t_i 的最短内接树, 在此步骤中每次迭代的复杂度为 $O(3 \log 3)$, 因此 k 次的复杂度为 $O(3 \log 3)$ 。此外, 由于 $n = \sum n_i$, 则所有三角形构造基于费马点内接树的总复杂度不超过 $O(n)$ 。步骤 5、步骤 6、步骤 7 都可在常数时间内完成。因此, 策略 RSFP 的复杂度为 $O(n \log n)$ 。

证毕。

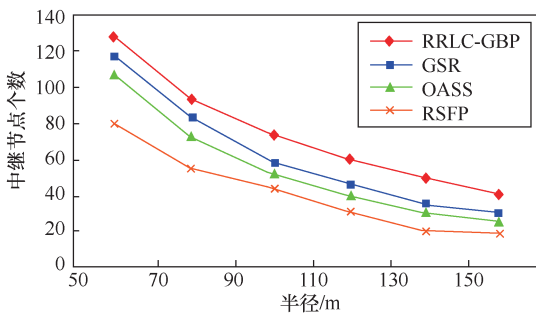
7 仿真实验

本节利用工具 NS2.34 对策略 RSFP、RRLC-GBP^[13]、GSR^[12]和 OASS^[1]进行性能比较。首先,将 50~70 个节点随机部署在一个 2 000 m×2 000 m 的区域内。然后,分别通过固定节点个数变化半径的方式和固定半径变化节点个数的方式比较 4 种策略所消耗的平均中继节点数量。

如图 2 所示,各策略消耗的中继节点数量随着中继节点半径的增加而减少。本文提出的策略 RSFP 所需的中继节点数量明显少于其他 3 种策略。这是因为:首先,RRLC-GBP 这种超区域中心部署节点的方式所生成的内接树的长度长于直骨架;其次,尽管策略 OASS 和 GSR 都采用基于直骨架的连接方式,RSFP 构造的基于费马点的最短内接树更短(注:基于费马点的最短内接树是直骨架的一个特例)。



(a) 节点个数为 50



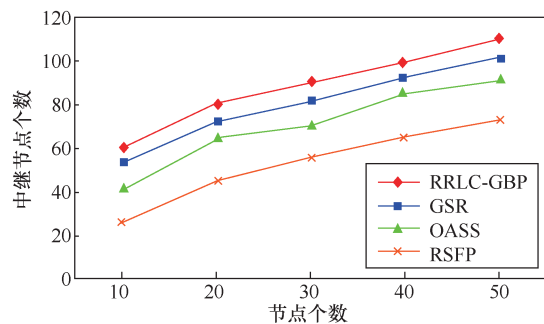
(b) 节点个数为 70

图2 节点个数为 50、70 时,各算法性能比较

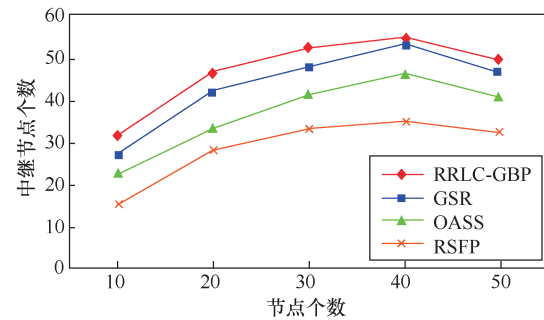
如图 3(a)所示,当中继节点半径等于 50 m 时,

各策略所消耗的中继节点数量随着节点数的增加而增加。

在图 3(b)中可以看到,当中继节点半径增加到 100 m 时,其消耗数量随着节点个数的增加呈现出先增后减的趋势。这是因为部署区域的大小固定,节点半径越大节点数量越多,那么更多的节点会直接相连。这意味着更少的节点需要通过部署中继节点的方式相连。此外,无论节点半径等于 50 m 或 100 m,本文提出的策略 RSFP 所需的中继节点数量都是最少的。



(a) 半径为 50 m



(b) 半径为 100 m

图3 半径为 50 m 和 100 m 时,各算法性能比较

8 结束语

连通性修复是保证网络有效性、可靠性的重要手段,它往往是利用较少的资源(如中继节点等)在各连通分支之间构造一棵最短内接树,即修复网络的 1-连通性。该问题可被模型化成构造一棵 1-连通的具有最少斯坦纳点(中继节点)且边长为定值(R)的斯坦纳最小树(SMT-MSP),这意味着内

接树越短所需的资源越少,即越接近最优的 SMT-MSP。目前,关于 1-连通性修复的策略没有将图形的几何性质与网络的拓扑结构很好地结合,因此难以用最少的中继节点完成修复。本文将具有较好图形几何性质的费马点、网络拓扑结构中的三角剖分与最小生成树有效的结合,设计了一种高效的网络连通性修复策略 RSFP。该策略通过反复构造基于费马点的最短三角形内接树减少连通性修复过程中所需的中继节点数,并且从理论上证明了策略 RSFP 的近似比和复杂度分别为 $\frac{3\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 与 $O(n\log n)$,而仿真实验表明该策略在中继节点消耗上明显较少。

参考文献:

- [1] XIAODING W, LI X, ZHOU S M. A straight skeleton based connectivity restoration strategy in the presence of obstacles for WSN[J]. Sensors, 2017, 17(10):2299.
- [2] LALOUANI W, YOUNIS M, BADACHE N. Optimized repair of a partitioned network topology[J]. Computer Networks, 2017, 128: 63-77.
- [3] EFRAT A, FEKETE S P, MITCHELL J S B, et al. Improved approximation algorithms for relay placement[J]. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 2016, 12(2): 20.
- [4] WANG X D, LI X, ZHOU S M. Restoration strategy based on optimal relay node placement in wireless sensor networks[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2015, 11(7): 409085.
- [5] MISRA S, MAJD N E, HUANG H. Approximation algorithms for constrained relay node placement in energy harvesting wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 2014, 63(12): 2933-2947.
- [6] YANG D, MISRA S, FANG X, et al. Two-tiered constrained relay node placement in wireless sensor networks: computational complexity and efficient approximations[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2012, 11(8): 1399-1411.
- [7] MISRA S, HONG S D, XUE G, et al. Constrained relay node placement in wireless sensor networks: formulation and approximations[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking (TON), 2010, 18(2): 434-447.
- [8] CHENG X, DU D Z, WANG L, et al. Relay sensor placement in wireless sensor networks[J]. Wireless Networks, 2008, 14(3): 347-355.
- [9] LLOYD E L, XUE G. Relay node placement in wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 2007, 56(1):

134-138.

- [10] TANG J, HAO B, SEN A. Relay node placement in large scale wireless sensor networks[J]. Computer Communications, 2006, 29(4): 490-501.
- [11] CHEN D, DU D Z, HU X D, et al. Approximations for steiner trees with minimum number of Steiner points[J]. Journal of Global Optimization, 2000, 18(1): 17-33.
- [12] JOSHI Y K, YOUNIS M. Exploiting skeletonization to restore connectivity in a wireless sensor network[J]. Computer Communications, 2016, 75: 97-107.
- [13] RANGA V, DAVE M, VERMA A K. Relay node placement to heal partitioned wireless sensor networks[J]. Computers & Electrical Engineering, 2015, 48: 371-388.
- [14] 陈洪生, 石柯. 基于四边形斯坦纳树的无线传感器网络连通恢复[J]. 计算机学报, 2014, 37(2): 457-469.
CHEN H S, SHI K. Quadrilateral steiner tree based connectivity restoration for wireless sensor networks[J]. Chinese Journal of Computers, 2014, 37(2): 457-469.
- [15] SENEL F, YOUNIS M. Novel relay node placement algorithms for establishing connected topologies[J]. Journal of Network and Computer Applications, 2016, (70): 114-130.
- [16] ROBINS G, ZELIKOVSKY A. Tighter bounds for graph Steiner tree approximation[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2005, 19(1): 122-134.

[作者简介]



周赵斌(1989-),男,江西南昌人,福建师范大学实验师,主要研究方向为网络与信息安全和网络编码。



章红艳(1982-),女,江苏南通人,福建师范大学讲师,网络安全与计算。



汪晓丁(1982-),男,福建安溪人,博士,福建师范大学副教授,主要研究方向为网络与信息安全、无线通信网络、云计算与物联网。